TAMÁS VARGA'S REFORM MOVEMENT AND THE HUNGARIAN "GUIDED DISCOVERY" APPROACH

Katalin Gosztonyi

Eötvös Loránd University, Budapest

Varga 100

Hungarian Academy of Sciences, Budapest

6 November 2019

Plan of the lecture

I. Tamás Varga's reform in its historical context

II. The main characteristics of Varga's conception on mathematics education

III. Varga's legacy today

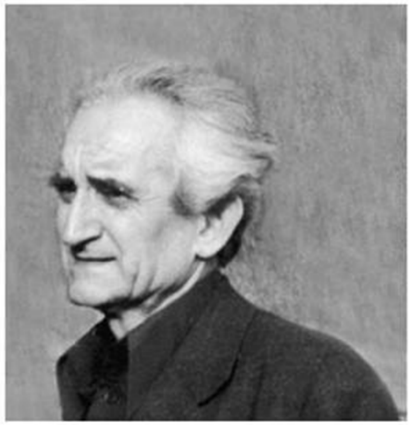
I. Tamás Varga's reform

in its historical context

Tamás Varga

Kunszentmiklós, 3 Nov. 1919. - Budapest, 1 Nov. 1987.

- Family: son of a Calvinist priest
- Well-known siblings (D. Varga writer, B. Vargha historian of literature, anthropologist of games)
- Married Ágnes Binét psychologist
- 1945- mathematics teacher
- 1947- Educational Ministry, then National Institut of Education
- 1951- Eötvös Loránd University, mathematics teacher education
- 1967- National Institute of Pedagogy



Tamás VARGA
(1919-1987)

- Several short experiments from the 1950s
- Teaching mathematics in one class from 1955 on
- 1963-1978 the Complex Mathematics Education experimental project

Varga's reform project (1963-1978)

- Direct antecedents
  - 1960 Paul Dienes' lectures
  - 1962 UNESCO conference on mathematics education in Budapest
- The complex mathematics education reform
  - Primary and middle school level (grades 1-8)
  - Experimentations since 1963 in a primary school
  - Progressively growing project (levels, number of schools and teachers included)
- Selected at the beginning of the 1970s as basis for the new national curricular reform
  - 1974 provisional curriculum
  - 1978 obligatory national curriculum
- Controversial reception

The political and institutional context

- Political background
  - Hungary in the communist „Eastern block”
  - But from the beginning of the 1960s, an easing of the dictatorship, international opening

- Educational context
  - 8 year (4+4) unique and obligatory primary school since 1946
  - Centralized direction and ideological control until the 1960s
  - A slow liberalisation process from the late 1960s
    - ⇨ Taking into account pedagogical and psychological research
    - ⇨ Some liberty for teachers
    - ⇨ Differentiation starts to appear
  - 1978 general curricular reform

An international context in mathematics education

- Participation in the "New Math" movement
  - From the '60s, participation in international exchanges, in the work of international organizations (CIEAEM, OECD, UNESCO etc.)
  - Co-editor of the UNESCO book about the Budapest congress with W. Servais
  - Invitations, publications in various countries (Soviet Union, Germany, France, Italy, USA, Canada etc.)

Caricatures of Leon Jeśmanowicz, CIEAEM meeting, Poland 1971

An international context in mathematics education

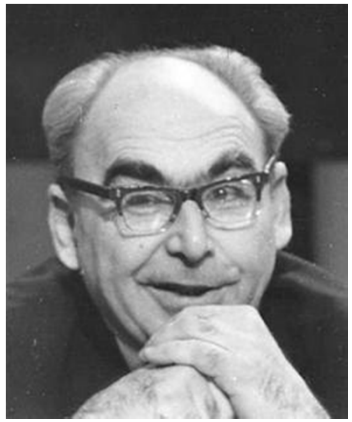
- Varga follows the reform movements and publications of various countries

- Some internationally shared ambitions
  - Answering **the social and economic needs** of industrialized societies: **reinforcing the role of mathematics** in the frame of a **democratised educational system**
  - Reforming **the content and the structure of curricula**: presenting mathematics as a coherent subject and integrating elements of "**modern mathematics**"
  - Reforming the **teaching practices**: taking into account the results of psychological research and methods of "active pedagogy" - Influence of **Piaget, Dienes** etc.

Hungarian mathematicians and a „heuristic" epistemology in the background

László KALMÁR
(1905-1976)

Rózsa PÉTER
(1905-1977)



Alfréd RÉNYI
(1921-1970)

János SURÁNYI
(1918-2006)

George PÓLYA
(1887-1985)

Imre LAKATOS
(1922-1974)

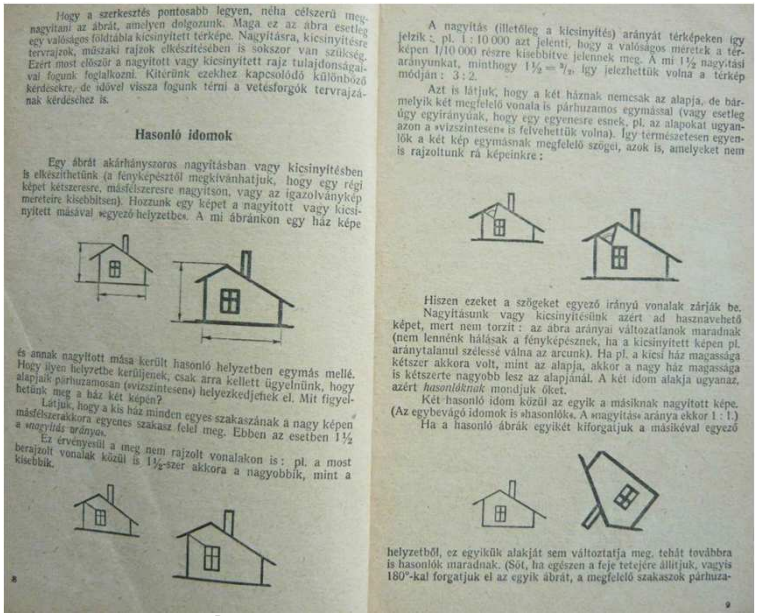
Hungarian mathematicians and a heuristic epistemology in the background

- A coherent epistemology described in philosophical texts, books popularizing mathematics, texts about mathematics education
- Mathematics is viewed
  - In permanent, organic development
  - Based on intuition and experiences
  - Guided by series of problems
  - Social activity
  - Dialogic nature
  - Creative, playful activity
- Emphasis on heuristic methods
- Limited use of formal language

Hungarian mathematicians and a heuristic epistemology in the background

- Hungarian mathematics in Varga's reform
  - Discrete mathematics
  - Logic – Kalmár, Péter
  - Probability – Rényi
  - Geometry – Hajós?

- The textbook series of Péter, Gallai et al.



Hogy a szerkesztés pontosabb legyen, néha célszerű megnagyítani az ábrát, amelyen dolgozunk. Maga ez az ábra esetleg egy valóságos földtábla kicsinyített térképe. Nagyításra, kicsinyítésre tervrajzok, műszaki rajzok elkészítésében is sokszor van szükség. Ezért most először a nagyított vagy kicsinyített rajz tulajdonságaival fogunk foglalkozni. Kitérünk ezekhez kapcsolódó különböző kérdésekre, de idővel vissza fogunk térni a vetésforgók tervrajzának kérdéséhez is.

Hasonló idomok

Egy ábrát akárhányszoros nagyításban vagy kicsinyítésben is elkészíthetünk (a fényképésztől megkívánhatjuk, hogy egy régi képet kétszeresre, másfélszeresre nagyítson, vagy az igazolványkép méreteire kisebbítsen). Hozzunk egy képet a nagyított vagy kicsinyített másával egyező helyzetbe. A mi ábránkon egy ház képe

és annak nagyított mása került hasonló helyzetben egymás mellé. Hogy ilyen helyzetbe kerüljenek, csak arra kellett ügyelnünk, hogy alapjaik párhuzamosan (vízszintesen) helyezkedjenek el. Mit figyeltünk meg a ház két képén?

Látjuk, hogy a kis ház minden egyes szakaszának a nagy képen másfélszeráakora egyenes szakasz felel meg. Ebben az esetben 1½ a *nagyítás aránya*.

Ez érvényesül a meg nem rajzolt vonalakon is: pl. a most berajzolt vonalak közül is 1½-szer akkora a nagyobbik, mint a kisebbik.

A nagyítás (illetőleg a kicsinyítés) arányát térképeken így jelzik: pl. 1 : 10 000 azt jelenti, hogy a valóságos méretek a térképen 1/10 000 részre kisebbítve jelennek meg. A mi 1½ nagyítási módjaink: 3 : 2.

Azt is látjuk, hogy a két háznak nemcsak az alapja, de bármelyik két megfelelő vonala is párhuzamos egymással (vagy esetleg úgy egyirányúak, hogy egy egyenesre esnek, pl. az alapokat ugyanazon a »vízszintesen« is felvehettük volna). Így természetesen egyenlők a két kép egymásnak megfelelő szögei, azok is, amelyeket nem is rajzoltunk rá képeinkre:

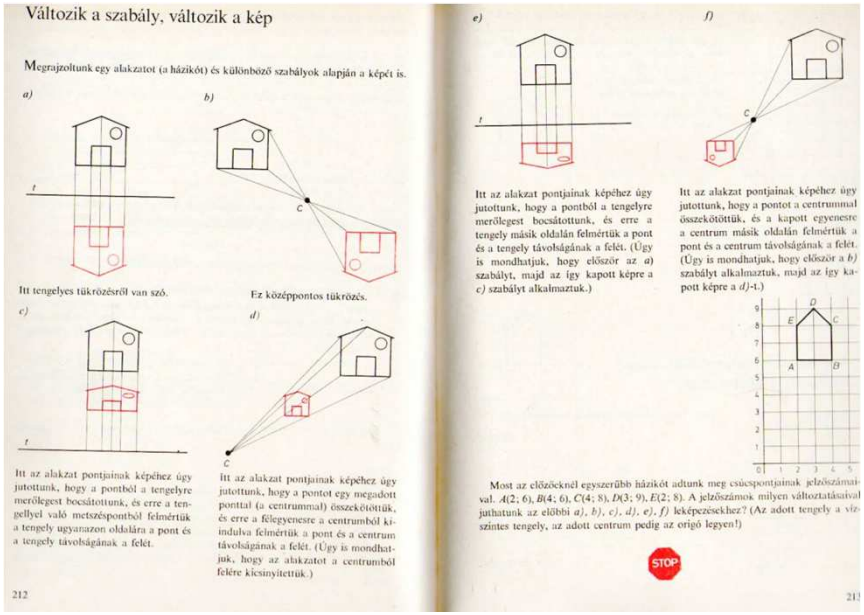
Hiszen ezeket a szögeket egyező irányú vonalak zárják be. Nagyításunk vagy kicsinyítésünk azért ad használhatót képet, mert nem torzít: az ábra arányai változatlanok maradnak (nem lenne hálásak a fényképésznek, ha a kicsinyített képen pl. aránytalanul szélessé válna az arcunk). Ha pl. a kicsi ház magassága kétszer akkora volt, mint az alapja, akkor a nagy ház magassága is kétszerte nagyobb lesz az alapjánál. A két idom alakja ugyanaz, azért *hasonlóknak* mondjuk őket.

Két hasonló idom közül az egyik a másiknak nagyított képe. (Az egybevágó idomok is hasonlók. A nagyítás aránya ekkor 1 : 1.)

Ha a hasonló ábrák egyikét kiforgatjuk a másikával egyező

helyzetből, ez egyikük alakját sem változtatja meg, tehát továbbra is hasonlók maradnak. (Sőt, ha egészen a feje tetejére állítjuk, vagyis 180°-kal forgatjuk el az egyik ábrát, a megfelelő szakaszok párhuza-

Péter-Gallai (1949)



Változik a szabály, változik a kép

Megrajzoltunk egy alakzatot (a házikót) és különböző szabályok alapján a képét is.

Itt tengelyes tükrözésről van szó.

Ez középpontos tükrözés.

Itt az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontból a tengelyre merőlegest bocsátottunk, és erre a tengellyel való metszéspontból felmértük a tengely ugyanazon oldalára a pont és a tengely távolságának a felét.

Itt az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontot egy megadott ponttal (a centrummal) összekötöttük, és erre a félegyenesre a centrumból kiindulva felmértük a pont és a centrum távolságának a felét. (Úgy is mondhatjuk, hogy az alakzatot a centrumból felére kicsinyítettük.)

Itt az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontból a tengelyre merőlegest bocsátottunk, és erre a tengely másik oldalán felmértük a pont és a tengely távolságának a felét. (Úgy is mondhatjuk, hogy először az *a)* szabályt, majd az így kapott képre a *c)* szabályt alkalmaztuk.)

Itt az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontot a centrummal összekötöttük, és a kapott egyenesre a centrum másik oldalán felmértük a pont és a centrum távolságának a felét. (Úgy is mondhatjuk, hogy először a *b)* szabályt alkalmaztuk, majd az így kapott képre a *d)*-t.)

Most az előzőeknél egyszerűbb házikót adtunk meg csúcspontjainak jelzőszámaival. $A(2; 6)$, $B(4; 6)$, $C(4; 8)$, $D(3; 9)$, $E(2; 8)$. A jelzőszámok milyen változtatásával juthatunk az előbbi *a), b), c), d), e), f)* leképezésekhez? (Az adott tengely a vízszintes tengely, az adott centrum pedig az origó legyen!)

Kovács-Földvári-Szeredi (1980)

The pedagogical-psychological background

- Complex influences, not always well documented
  - Piaget
  - Russian pedagogy
  - Ferenc Mérei
  - Sándor Karácsony

The pedagogical-psychological background

Sándor KARÁCSONY

(1891-1952)

- Calvinist pastor
- Psychologist, philosopher, linguist, educator
- In the 1940s, an intellectual circle around him, discussing questions about education
- Several mathematicians connected with him (L. Kalmár, A. Rényi, J. Surányi, I. Lakatos T. Varga and his brothers)

- Some probable influences
  - importance of visual intuition
  - a social psychology of learning

A controversial implementation

- Period of experimentation
  - Progressive dissemination, direct contact with participating teachers
  - More than 100 participating classes in the early 1970s
  - Generally sucessful (complex impact assessment, Klein 1972)

- Period of obligatory introduction
  - Political expectation, against the intentions of Varga's team
  - Public debates, controversies
  - Resistance of teachers and parents
  - New curriculum and textbooks in 1985

- A partial presence of the reform's effects, in curricula, textbooks, teacher education and practices, until today

II. The main characteristics of Varga's conception on mathematics education

„Complex" mathematics education

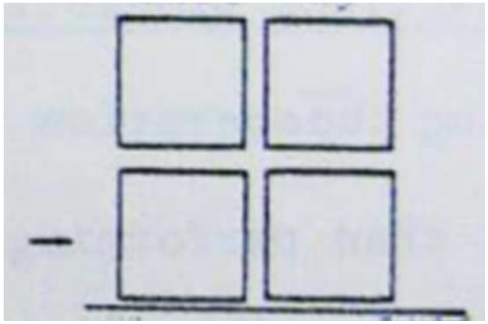
- Complexity of the approach
  - Curriculum, resources, practices…
- Mathematical complexity
  - Mathematical coherence, connection of various domains
- Pedagogical complexity
  - Various tools and methods

Tasks in Varga's approach

- Rich tasks (problem-situations)
  - Allowing students to make sense of mathematical notions
  - Students' active contribution to the construction of mathematical knowledge
  - Linking several mathematical domains
  - Open to different solution strategies
- Use of various tools, manipulatives
  - Logical sets, Dienes sets, Cuisenaire rods etc.
  - Ordinary objects from the classroom
- Importance of playfullness, pleasure

Tasks in Varga's approach

- Example: substraction by rolling a dice



The goal is to make the difference as great as possible. They can fill the boxes in any order, but only with random numbers produced by rolling dice. After a number is given by the dice, children write it into one of the boxes which is still empty and cannot change it. After filling the third box they have no choice for the fourth random number. Those with the largest difference get three points, those with the second largest get two, those with the next get one and the others none. Then they start again.

T. Varga (1982). *New topics for the elementary school math curriculum*

The curriculum of Varga's reform

A structure favoring discovery processes

- A diversity of the subjects treated; early introduction, dialectic relation between them:
  - ⇨ sets-logic
  - ⇨ arithmetic-algebra
  - ⇨ relations-functions -series
  - ⇨ geometry-measuring
  - ⇨ combinatorics-probability-statistics

- Flexible structure:
  - „Compulsory" and „suggested" topics
  - Difference between compulsory topics and requirements

    "many concepts and skills not appearing as requirements in the school year where they are first mentioned in the syllabus, get enrolled to them in subsequent years when they are supposed to become ripened" (Halmos & Varga 1978 p. 231)

Resources and expected teaching practices

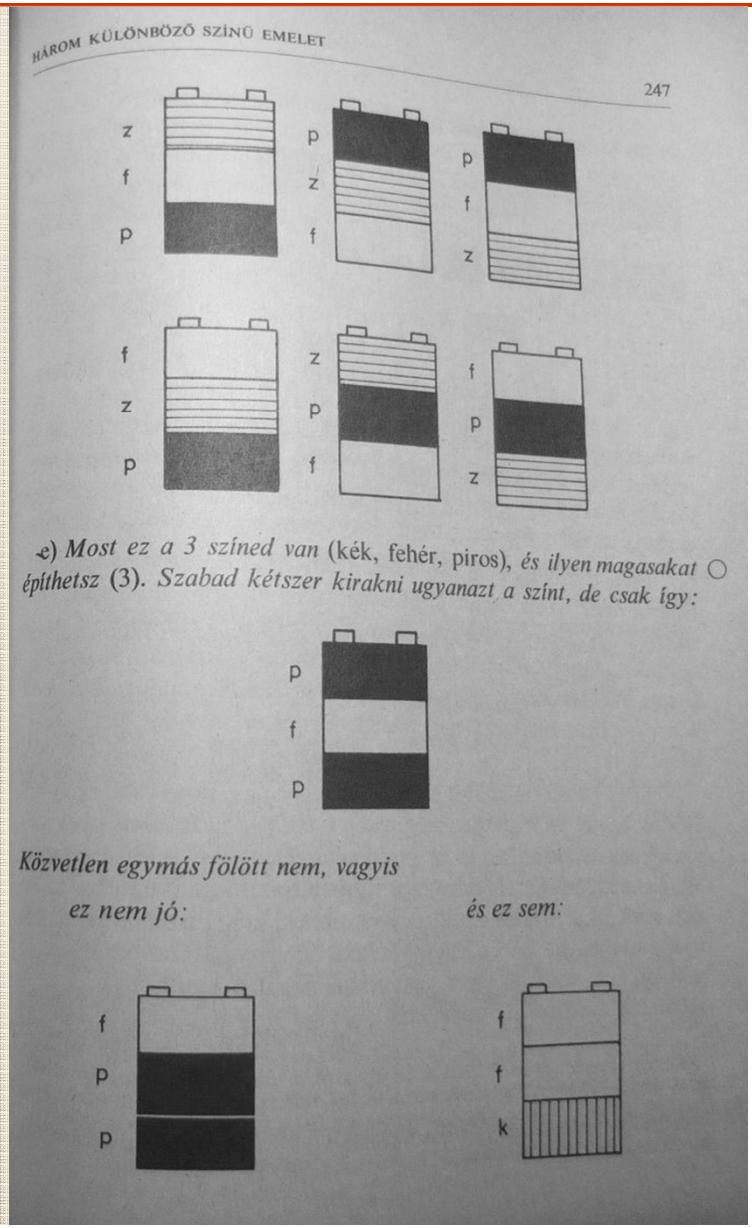
Series of problems

- Not isolated problem situations but „series of problems”
- In the textbooks and teachers’ handbooks
  - Examples of series
  - Suggestions to create and organize series
  - Encouraging teachers to elaborate their own long term teaching trajectories

Resources and expected teaching practices

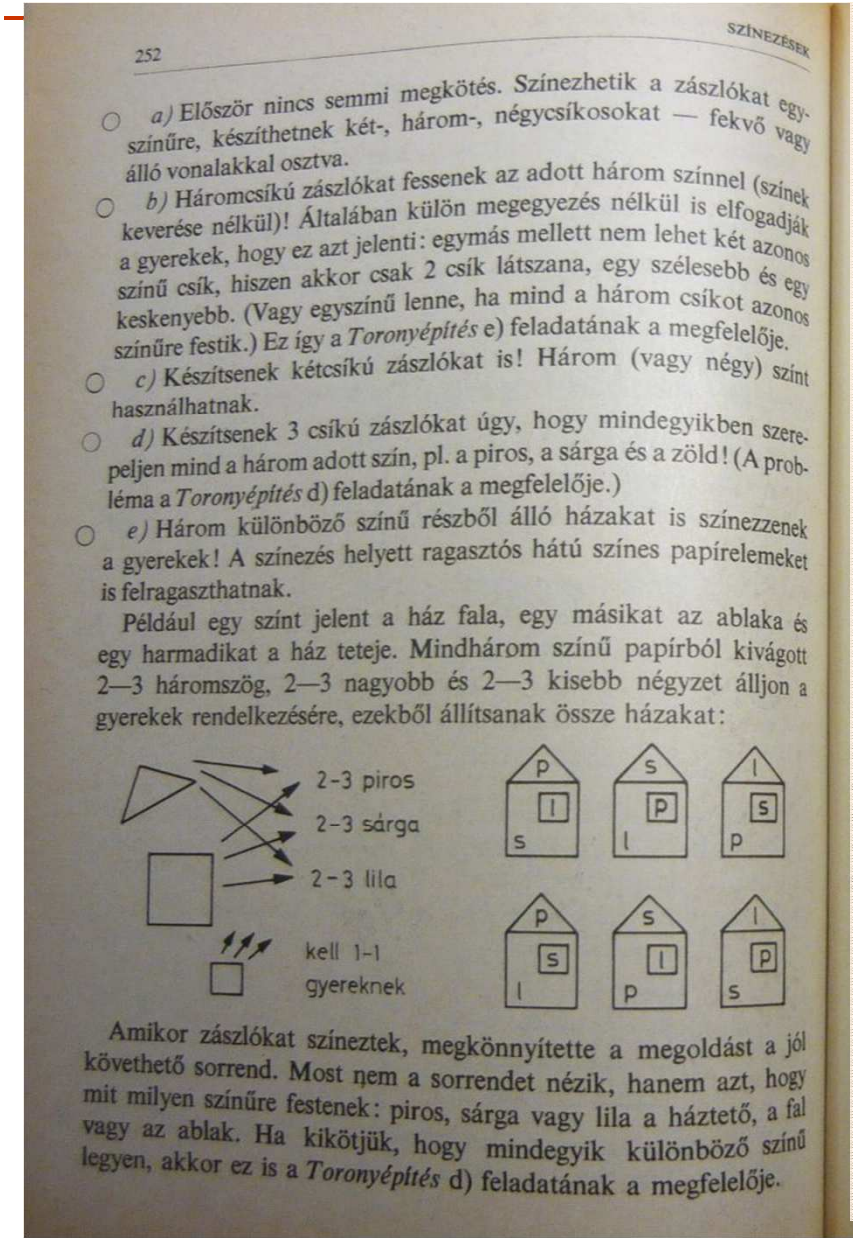
Series of problems: combinatorics in the 1st grade teachers' handbook

- General level
  - Diversity of the problems (e.g. materials)
  - Increasing abstraction
- Sub-series:
  - Free game with the material
  - Towers with a given height
  - Different towers with the same height
  - All different towers with the given height (the number of possibilities)



IV. Resources and expected teaching practices

Series of problems: combinatorics in the 1st grade teachers' handbook



252 SZÍNEZÉSEK

a) Először nincs semmi megkötés. Színezhetik a zászlókat egyszínűre, készíthetnek két-, három-, négycsíkosokat — fekvő vagy álló vonalakkal osztva.

b) Háromcsíkú zászlókat fessenek az adott három színnel (színek keverése nélkül)! Általában külön megegyezés nélkül is elfogadják a gyerekek, hogy ez azt jelenti: egymás mellett nem lehet két azonos színű csík, hiszen akkor csak 2 csík látszana, egy szélesebb és egy keskenyebb. (Vagy egyszínű lenne, ha mind a három csíkot azonos színűre festik.) Ez így a *Toronyépítés* e) feladatának a megfelelője.

c) Készítsenek kétcsíkú zászlókat is! Három (vagy négy) színt használhatnak.

d) Készítsenek 3 csíkú zászlókat úgy, hogy mindegyikben szerepeljen mind a három adott szín, pl. a piros, a sárga és a zöld! (A probléma a *Toronyépítés* d) feladatának a megfelelője.)

e) Három különböző színű részből álló házakat is színezzenek a gyerekek! A színezés helyett ragasztós hátú színes papírelemeket is felragaszthatnak.

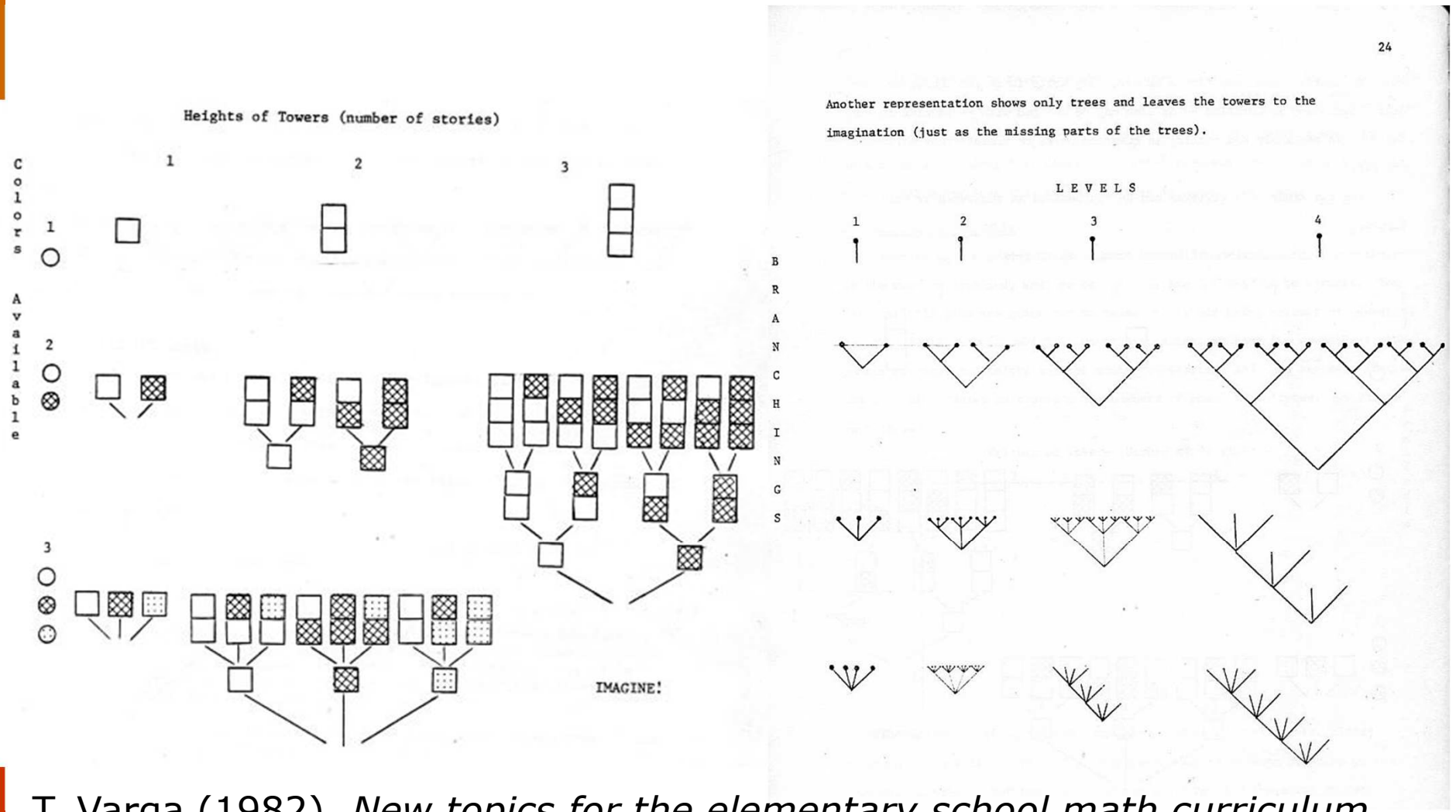
Például egy színt jelent a ház fala, egy másikat az ablaka és egy harmadikat a ház teteje. Mindhárom színű papírból kivágott 2—3 háromszög, 2—3 nagyobb és 2—3 kisebb négyzet álljon a gyerekek rendelkezésére, ezekből állítsanak össze házakat:

Amikor zászlókat színeztek, megkönnyítette a megoldást a jól követhető sorrend. Most nem a sorrendet nézik, hanem azt, hogy mit milyen színűre festenek: piros, sárga vagy lila a háztető, a fal vagy az ablak. Ha kikötjük, hogy mindegyik különböző színű legyen, akkor ez is a *Toronyépítés* d) feladatának a megfelelője.

- Apparent differences, making the problems new in students' eyes
- Recognizing analogies between corresponding phases of different series
- Progressive generalization of methods and solutions

IV. Resources and expected teaching practices

Series of problems: building towers in (Varga 1982)



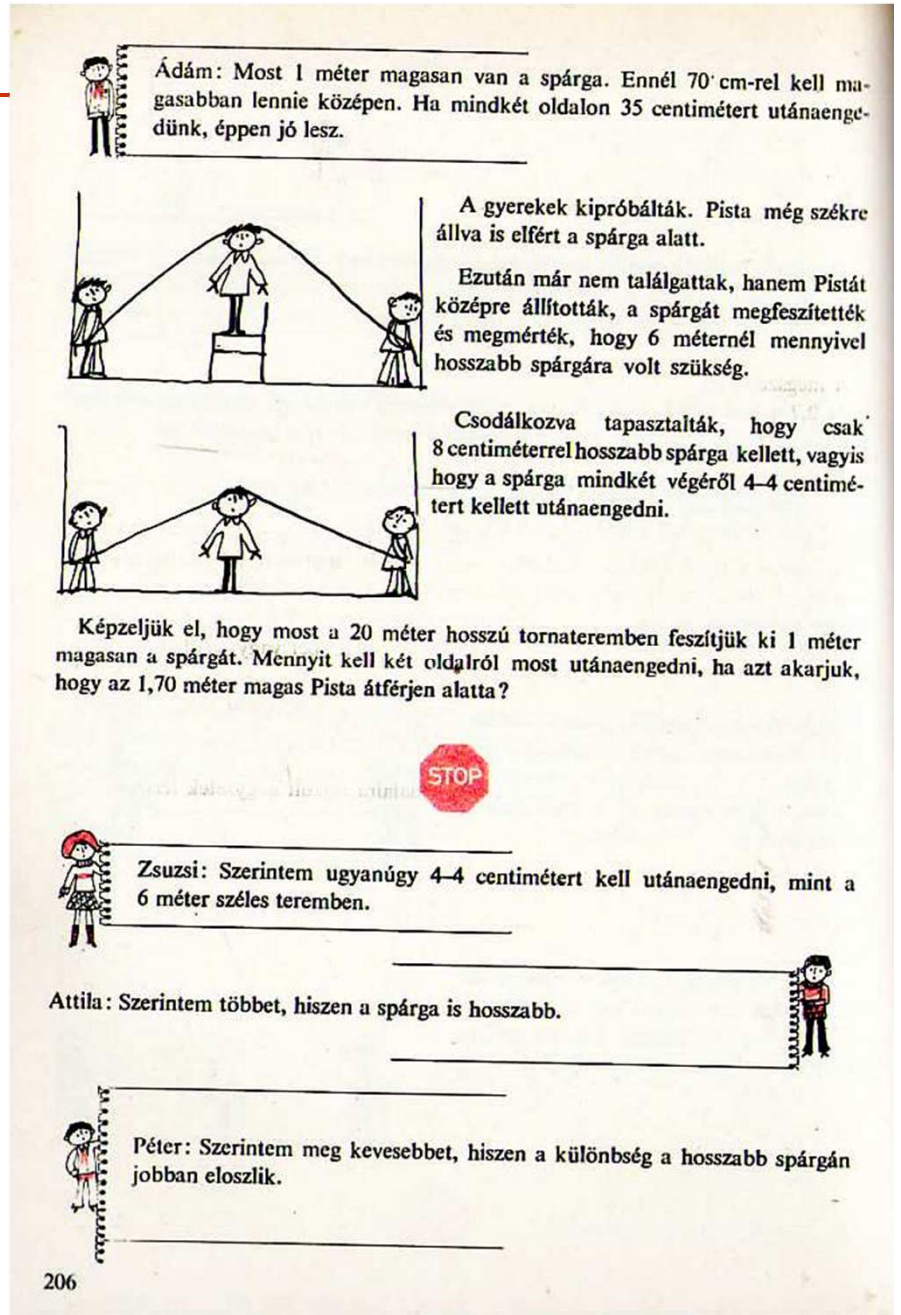
T. Varga (1982). *New topics for the elementary school math curriculum*

Resources and expected teaching practices

Classroom dialogues

- *Fictive classroom dialogues in the textbooks*

- *In the teachers' handbooks, suggestions for the managment of dialogues*
  - Not completely autonomous student work, but important responsibility in the construction of notions
  - How to intervene supporting the emergence of mathematical notions but without directly transmitting knowledge ?



Ádám: Most 1 méter magasan van a spárga. Ennél 70 cm-rel kell magasabban lennie középen. Ha mindkét oldalon 35 centimétert utánaengedünk, éppen jó lesz.

A gyerekek kipróbálták. Pista még székre állva is elfért a spárga alatt.

Ezután már nem találgattak, hanem Pistát középre állították, a spárgát megfeszítették és megmérték, hogy 6 méternél mennyivel hosszabb spárgára volt szükség.

Csodálkozva tapasztalták, hogy csak 8 centiméterrel hosszabb spárga kellett, vagyis hogy a spárga mindkét végéről 4–4 centimétert kellett utánaengedni.

Képzeljük el, hogy most a 20 méter hosszú tornateremben feszítjük ki 1 méter magasan a spárgát. Mennyit kell két oldalról most utánaengedni, ha azt akarjuk, hogy az 1,70 méter magas Pista átférjen alatta?

STOP

Zsuzsi: Szerintem ugyanúgy 4–4 centimétert kell utánaengedni, mint a 6 méter széles teremben.

Attila: Szerintem többet, hiszen a spárga is hosszabb.

Péter: Szerintem meg kevesebbet, hiszen a különbség a hosszabb spárgán jobban eloszlik.

206

The teacher's work

- Varga's approach expects from the teachers
  - High-level mathematical knowlege
  - Pedagogical creativity
  - Autonomy on several levels
    - ⇨ Long-term teaching trajectories
    - ⇨ Task design
    - ⇨ Management of classroom interactions

- Supporting elements but difficult use of the resources

Summary of Varga's approach

- Many elements present from the international New Math movement
  - Coherence of mathematics curricula, elements of „modern mathematics"
  - Focus on mathematical notions and structures instead of mechanical counting and measurement
  - Use of various manipulatives and the methods of active pedagogy

- But also emphasis on problem solving and mathematical discovery
  - Represents the „heuristic" epistemology of a Hungarian mathematical community
  - Teaching mathematics by „guided discovery"
  - Connects Varga's approach with other approaches related to Inquiry Based Mathematics Education (Artigue & Blomhøj 2013)

Summary of Varga's approach

Elements of „guided discovery"

- A „heuristic" epistemology of mathematics
- Rich tasks (problem-situations)
  - Allowing students to make sense of mathematical notions
  - Students' active contribution to the construction of mathematical knowledge
  - Linking several mathematical domains
  - Open to different solution strategies
- A collective re-discovery process of mathematics
  - Long, complex teaching trajectories structured by series of problems
  - Classroom dialogues
- Curriculum
  - Diversity of the domains treated in parallel
  - Spiralic and flexible structure
- Diversity of tools and representations
- Emphasis on the playful and aesthetic character of mathematics
- Respect and valorization of students' diversity

III. Varga's legacy today

Varga's legacy today

- Partial presence of his approach in
  - Curricula
  - Textbooks
  - Teacher education (especially primary level)
  - Practices – in a narrow circle of teachers
- Recognition among specialists of mathematic education
- Difficulties of dissemination

The ongoing MTA-ELTE research project

- MTA-ELTE Complex mathematics education research project (2016-2020)
  - Revisiting Varga's approach
  - Adapting it for current mathematics education
  - Theoretical description, better connection with current research
  - Supporting the dissemination

- Various participants (researchers, teachers), several sub-projects

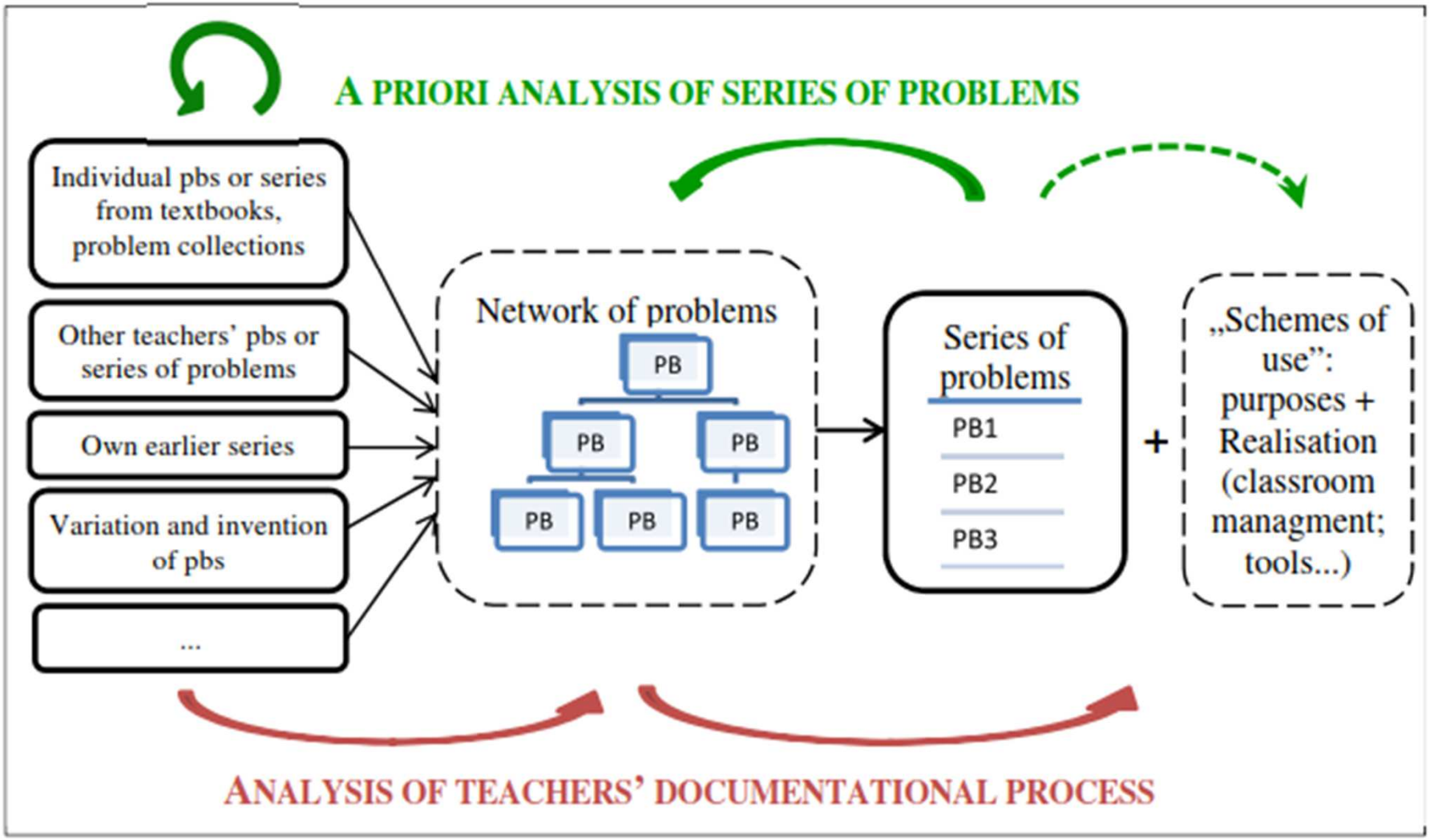
The ongoing MTA-ELTE research project

An example of current research

- A subgroup focusing on the teacher's work with series of problems
  - A mixed group of researchers and expert teachers of the approach
- Aims
  - Analysing expert teachers' work
  - Supporting the dissemination of the approach
- Preparation of a commented collection of SoP
  - Generic examples, illustrating the principles of constructing and using SoP
  - The process of preparation as a research tool for analysing expert teachers' work („reverse engineering")

The ongoing MTA-ELTE research project

An example of current research



Thank you for your attention.